naszemiasto.pl

MatmaNa6
z nami zaliczysz matmę na 6!

MATURA 2012

Powtórka do matury z matematyki

Część IX: Stereometria
ODPOWIEDZI

Organizatorzy: MatmaNa6.pl, naszemiasto.pl

Witaj,

otrzymałeś już dziewiątą z dziesięciu części materiałów powtórkowych do matury z matematyki. Tutaj znajdziesz rozwiązania udostępnionych zadań z działu stereometria. W kolejny poniedziałek pod adresem http://naszemiasto.pl będzie dostępna ostatnia część powtórki.
Pod adresem http://matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum znajdziesz materiały pomocne przy rozwiązywaniu zadań.

Powodzenia,
Redaktorzy portalu MatmaNa6.pl
Dziennikarze naszemiasto.pl

Stereometria

Zadanie 1:

Jeżeli suma długości krawędzi sześcianu wynosi 48, to objętość sześcianu jest równa:

$a)$ 48

$b)$ 64

$c)$ 72

$d)$ 96

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: b)

Niech a oznacza długość krawędzi sześcianu.

$$12a=48$$
$$a=4$$
$$V=a^3=4^3=64$$

Zadanie 2:

Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku długości 5. Objętość tego walca wynosi:

$a)\ \frac{125\pi}{4}$

$b)\ \frac{25\pi}{2}$

$c)\ \frac{125\pi}{3}$

$d)\ \frac{625\pi}{3}$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: a)

$$H=5$$

$$r=\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{5}{2}$$

$$V=\pi r^2 H=\pi\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot 5=\pi\frac{25}{4}\cdot 5=\frac{125}{4}\pi$$

Zadanie 3:

Przekątna prostopadłościanu o wymiarach $6\times8\times10$ ma długość:

$a)\ 10\sqrt{2}$

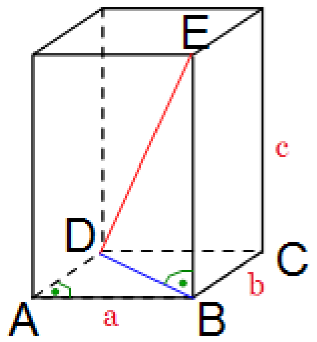
$b)\ 10$

$c)\ 8\sqrt{3}$

$d)\ 8\sqrt{2}$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: a)



$$|DB|^2=|AB|^2+|AD|^2$$

$$|DB|^2=64+36=100$$

Obliczamy długość przekątnej $|DE|$ (także z Twierdzenia Pitagorasa).

$$|DE|^2=|DB|^2+|BE|^2$$

$$|DE|^2=100+10^2=100+100=200$$

$$|DE|^2=2\cdot100$$

$$|DE|=10\sqrt{2}$$

Zadanie 4:

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Jeżeli wszystkie krawędzie tego ostrosłupa mają taką samą długość, to kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy wynosi:

$a)\ 30^{\circ}$

$b)\ 45^{\circ}$

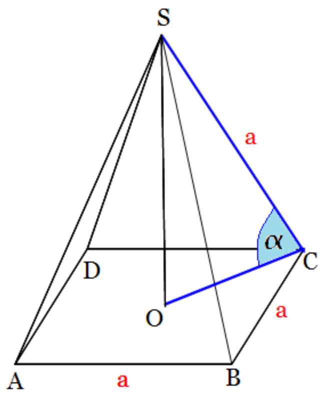
$c)\ 60^{\circ}$

$d)\ 90^{\circ}$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: b)

a - długość krawędzi



α - kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy

Długość odcinka $|OC|$, to połowa przekątnej kwaratu o boku a.

$$|OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{|OC|}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 45^{\circ}$$

Zadanie 5:

Jeżeli objętość kuli wynosi 36π , to jej promień ma długość:

$a)\ 3$

$b)\ 4$

$c)\ 6$

$d)\ 9$

Rozwiązanie:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$36\pi=\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$9\cdot 3=R^3$$

$$R^3=27$$

$$R=3$$

Zadanie 6:

W pewnym ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym, krawędź podstawy jest równa wysokości i wynosi $3\ cm$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

$a=3\ cm$

$H=a=3\ cm$

Podstawą ostrosłupa jest sześciokąt foremny, stąd jego pole wynosi:

$$P_p=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{27\sqrt{3}}{2}$$

Objętość ostrosłupa wynosi:

$$V=\frac{1}{3}P_p\cdot H=\frac{\frac{1}{3}\cdot 27\sqrt{3}}{2}\cdot 3=\frac{27\sqrt{3}}{2}$$

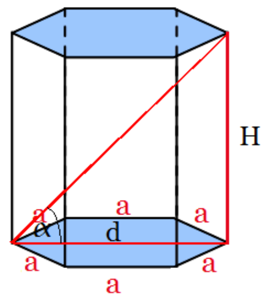
Zadanie 7:

W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym, kąt nachylenia dłuższej przekątnej do płaszczyzny podstawy wynosi $45\circ$. Wysokość tego graniastosłupa wynosi 6 . Oblicz długość krawędzi podstawy.

Rozwiązanie:

$H=6$ - wysokość graniastosłupa

$\alpha=45^{\circ}$ - kąt nachylenia długiej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy



$$\tan\alpha=\frac{H}{d}$$

$$d=2a$$

$$\tan\alpha=\frac{H}{2a}$$

$$a=\frac{H}{2\tan\alpha}$$

$$a=\frac{6}{2\tan 45^{\circ}}$$

$$a=\frac{3}{1}=3$$

Zadanie 8:

Kąt rozwarcia stożka ma miarę $120°$. Wysokość tego stożka ma długość 6.
Oblicz objętość tej bryły.

Rozwiązanie:

$\alpha = 120°$ - kąt rozwarcia stożka
$H = 6$ - wysokość stożka
Kątem między tworzącą a wysokością będzie połowa kąta α czyli $60°$.

$$r = 6\sqrt{3}$$

Pole podstawy:

$$P_p = \pi r^2 = \pi (6\sqrt{3})^2 = \pi \cdot 36 \cdot 3 = 108\pi$$

Objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 108\pi \cdot 6 = 216\pi$$

Zadanie 9:

Kulę przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jej środek. Wiadomo, że pole przekroju wynosi 25π. Oblicz objętość kuli.

Rozwiązanie:

Po przecięciu kuli płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli, otrzymamy koło. Wiemy, że pole tego przekroju wynosi 25π. Stąd:

$$\pi R^2 = 25\pi$$

Obliczamy promień kuli (oraz koła będącego przekrojem):

$$R^2 = 25$$

$R > 0$, stąd $R = 5$.

Objętość kuli:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{4 \cdot 125}{3}\pi = \frac{500}{3}\pi$$

Zadanie 10:

Wykaż, że objętość czworościanu o boku długości a wynosi $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Rozwiązanie:

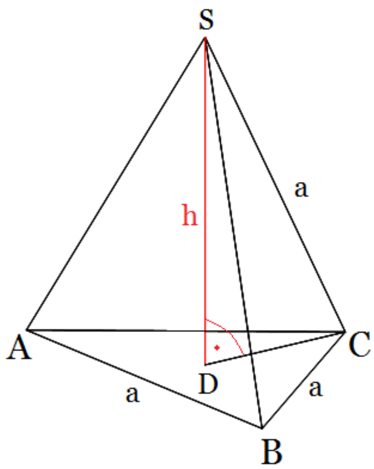
Czworościan jest ostrosłupem, zatem objętość ostrosłupa obliczamy korzystając ze wzoru:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

gdzie

P_p - pole podstawy

h - wysokość ostrosłupa



Podstawą czworościanu jest trójkąt równoboczny, stąd:

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Aby obliczyć objętość, musimy znaleźć długość wysokości czworościanu. Zgodnie z rysunkiem powyżej, i na podstawie Twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta CDS otrzymujemy równanie:

$$|CD|^2 + h^2 = a^2$$

Odcinek CD to $\frac{2}{3}$ wysokości podstawy. Wysokość podstawy ma długość $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$|CD| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Wysokość czworościanu:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$\frac{3a^2}{9} + h^2 = a^2$$

$$\frac{a^2}{3} + h^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3}$$

$$h^2 = \frac{2a^2}{3}$$

Ponieważ $h > 0$, to otrzymujemy, że:

$$h = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Obliczamy objętość czworościanu:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \quad .$$

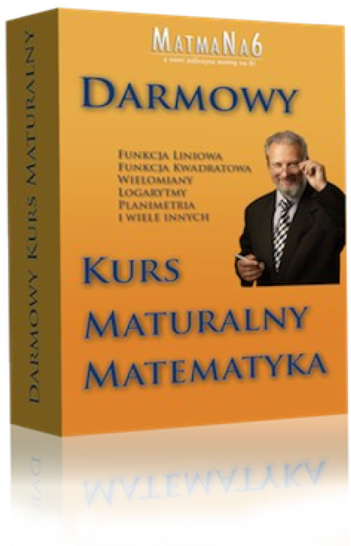
Ostatnia porcja zadań dostępna będzie w poniedziałek pod adresem

http://www.naszemiasto.pl

Szczegółowe wyjaśnienia zagadnień z działu stereometria, które pomogą Ci w rozwiązaniu powyższych zadań znajdziesz na stronie

http://matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum

Wszelkie uwagi, komentarze na temat powtórki maturalnej można kierować na adres pytania@matmana6.pl.



Redaktorzy serwisu MatmaNa6.pl prowadzą Darmowy Kurs Maturalny z matematyki na poziomie podstawowym i rozszerzonym, który składa się z ponad 70 lekcji. Każda lekcja zawiera:

1. omówienie wybranego zagadnienia,
2. ćwiczenia interaktywne,
3. przykłady zadań,
4. zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania,
5. rozwiązania zadań z poprzedniej lekcji.

Kliknij aby zapisać się na kurs.