(1) Przekształcamy wyrażenie

$$k^6 - 2k^4 + k^2 = k^2(k^4 - 2k^2 + 1) = k^2(k^2 - 1)^2 =$$
$$= k^2((k-1)(k+1))^2 = (k-1)^2 k^2 (k+1)^2 =$$
$$= \underbrace{(k-1)k(k+1)}_{\Downarrow} \underbrace{(k-1)k(k+1)}_{\Downarrow}$$

3 kolejne liczby całkowite, zatem ktoraś z nich jest podzielna przez 2, a ktoraś przez 3; co daje nam podzielność przez 6

—||—

co daje podzielność przez 36

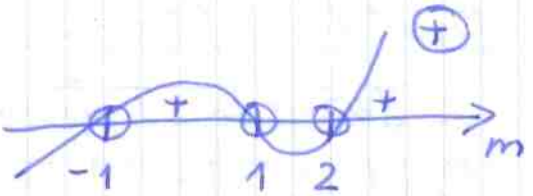
(2)

$$L = \frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = \frac{a(b-c)}{(a-c)(b-c)} + \frac{b(a-c)}{(a-c)(b-c)} = \frac{ab - ac + ba - bc}{ab - ac - bc + c^2} =$$
$$= \frac{2ab - c(a+b)}{ab + c^2 - c(a+b)} = \frac{2ab - c \cdot 2c}{ab + c^2 - c \cdot 2c} = \frac{2ab - 2c^2}{ab - c^2} =$$
$$= \frac{2(a \cdot b - c^2)}{a \cdot b - c^2} = 2 = P$$

(3) ZAŁOŻENIA: $a = 1$ $b = -4m$ $c = -m^3 + 6m^2 + m - 2$

1) $\Delta > 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-4m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m^3 + 6m^2 + m - 2)$$
$$\Delta = 16m^2 + 4m^3 - 24m^2 - 4m + 8$$
$$\Delta = 4m^3 - 8m^2 - 4m + 8$$
$$4m^3 - 8m^2 - 4m + 8 > 0 \quad / : 4$$
$$m^3 - 2m^2 - m + 2 > 0$$
$$m^2(m-2) - (m-2) > 0$$
$$(m^2 - 1)(m-2) > 0$$
$$(m-1)(m+1)(m-2) > 0$$
$$m_1 = 1 \quad m_2 = -1 \quad m_3 = 2$$



$m \in (-1, 1) \cup (2, \infty)$

2) $(x_1-x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 =$

$= x_1^2 + x_2^2 + (2x_1x_2 - 2x_1x_2) - 2x_1x_2 =$

$= (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) - 4x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2$

z WZORÓW VIETE'A $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

$(x_1-x_2)^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\cdot\frac{c}{a}$

równość $(x_1-x_2)^2 < 8(m+1)$ ma postać

$\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} < 8(m+1)$

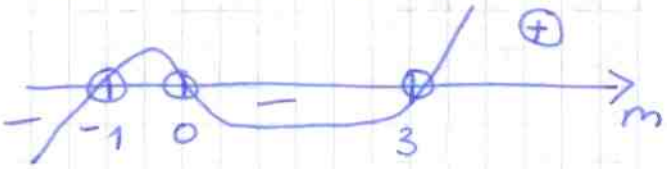
$\left(-\frac{4m}{1}\right)^2 - 4\cdot\frac{-m^3+6m^2+m-2}{1} < 8(m+1)$

$16m^2 + 4m^3 - 24m^2 - 4m + 8 < 8m + 8$

$4m^3 - 8m^2 - 12m < 0$

$4m(m^2 - 2m - 3) < 0$

$m_1 = 0$ $m_2 = -1$ $m_3 = 3$



$m \in (-\infty; -1) \cup (0; 3)$

podsumowując oba warunki i ich rozwiązania

$m \in (0, 1) \cup (2, 3)$

4) $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cdot\cos x = 1 - \cos x$

$2\sin^2 x(1-\cos x) = 1 - \cos x$

$2\sin^2 x(1-\cos x) - (1-\cos x) = 0$

$(2\sin^2 x - 1)(1-\cos x) = 0$

z Jedynki Trygonometrycznej $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$(2(1-\cos^2 x) - 1)(1-\cos x) = 0$

$(2 - 2\cos^2 x - 1)(1-\cos x) = 0$

$(1 - 2\cos^2 x)(1-\cos x) = 0$

$1-2\cos^2 x=0$ lub $1-\cos x=0$

$1=2\cos^2 x$ $\quad$ $1=\cos x$

$\frac{1}{2}=\cos^2 x$

z tablic trygonometrycznych i własności $\cos x$

$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cos x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $x=0$

$x=2\pi$

$x=\frac{\pi}{4}$ $\quad$ $x=\frac{3}{4}\pi$

$x=\frac{7}{4}\pi$ $\quad$ $x=\frac{5}{4}\pi$

rozwiązaniami w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ są

$0, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, 2\pi$

(5) z definicji logarytmu

$a_n=3^{x_n} \iff x_n=\log_3 a_n$

$x_1=\log_3 a_1$ $\quad$ $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

$x_2=\log_3 a_2$

$\vdots$

$x_{10}=\log_3 a_{10}$

z własności logarytmów $\log_a b+\log_a c=\log_a b\cdot c$ i własn. potęg $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$ oraz $1+2+\dots+9=\frac{1+9}{2}\cdot 9=45$

mamy

$x_1+x_2+\dots+x_{10}=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\dots+\log_3 a_{10}=$

$=\log_3(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{10})=\log_3(a_1\cdot a_1q\cdot\ldots\cdot a_1\cdot q^9)=$

$=\log_3(a_1^{10}\cdot q^{1+2+\dots+9})=\log_3(a_1^{10}\cdot q^{45})=$

$=\log_3(a_1^{10}\cdot 27^{45})=\log_3 a_1^{10}+\log_3\cdot 27^{45}=$

$=10\log_3 a_1+45\log_3 27=10\log_3 a_1+45\cdot 3=$

$=10\log_3 3^{x_1}+135=10\cdot x_1\cdot\underbrace{\log_3 3}_{=1}+135=$

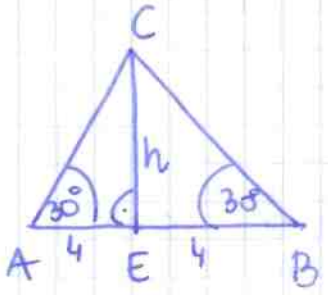
$10x_1+135$

$x_1+x_2+\dots+x_{10}=10x_1+135$

$10x_1+135=145$

$10x_1=10$ $\quad$ $x_1=1$

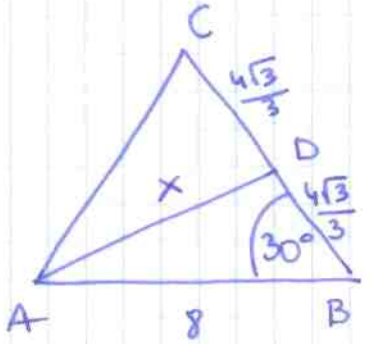
⑥



$$\cos 30^\circ = \frac{|AE|}{|AC|}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{4}{|AC|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{|AC|} \Rightarrow |AC| = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$



z twierdzenia cosinusów

$$x^2 = 8^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2\cdot 8\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\cos 30^\circ$$

$$x^2 = 64 + \frac{16\cdot 3}{9} - \frac{64\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = 37\tfrac{1}{3}$$

$$x^2 = \frac{112}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{112}{3}}$$

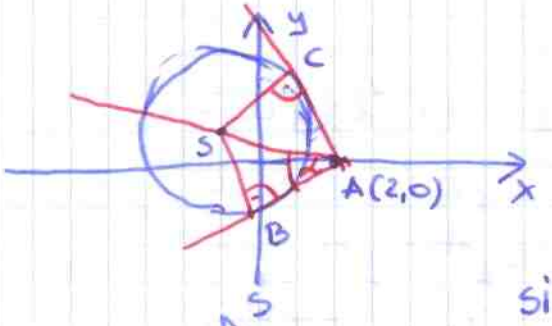
$$x = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{4\sqrt{21}}{3}$$

⑦ $x^2+y^2+2x-2y-3=0$

$(x^2+2x+1)+(y^2-2y+1)-2-3=0$

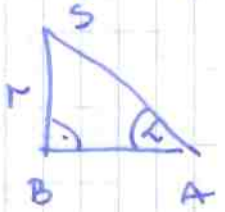
$(x+1)^2+(y-1)^2=5 \Rightarrow S(-1,1)\ r=\sqrt{5}$



$\measuredangle BAC = 2\alpha$

$|AS| = \sqrt{(-1-2)^2+(1-0)^2} = \sqrt{10}$

$r = \sqrt{5}$



$\sin\alpha = \frac{|BS|}{|AS|}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ $\quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

zatem $\alpha = 45^\circ$

$\measuredangle BAC = 90^\circ$

(8) Wzór na pole boczne danej bryły

$P_b = 6 \cdot aH$ zał $0 < a, H < 4$

S - suma krawędzi

$S = 24$ i $S = 2 \cdot 6 \cdot a + 6H$

$12a + 6H = 24 \quad / : 6$

$2a + H = 4 \Rightarrow H = 4 - 2a$; podstawiając H do P_b otrzymujemy funkcję zależną od a

$P_b = 6a(4 - 2a)$

$P_b = 24a - 12a^2$

$P_b = -12a^2 + 24a$ szukamy największej wartości funkcji, czyli współrzędnych wierzchołka paraboli (x_w, y_w)

$\Delta = 24^2 - 4 \cdot (-12) \cdot 0 = 576$

$x_w = -\frac{b}{2a} \quad x_w = \frac{-24}{-24} = 1$

$y_w = -\frac{\Delta}{4a} \quad y_w = \frac{-576}{4 \cdot (-12)} \quad y_w = 12$

Pole boczne będzie największe dla $a = 1$ i $H = 2$ $(H = 4 - 2 \cdot 1)$ i wynosić będzie 12.

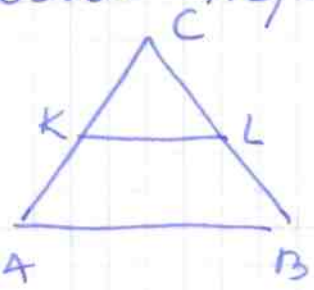
(9) wybieramy dwie pozycje dla cyfry 2 i trzy pozycje dla cyfry 3, wybieramy trzy pozycje dla cyfr 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

~~kombinacje~~

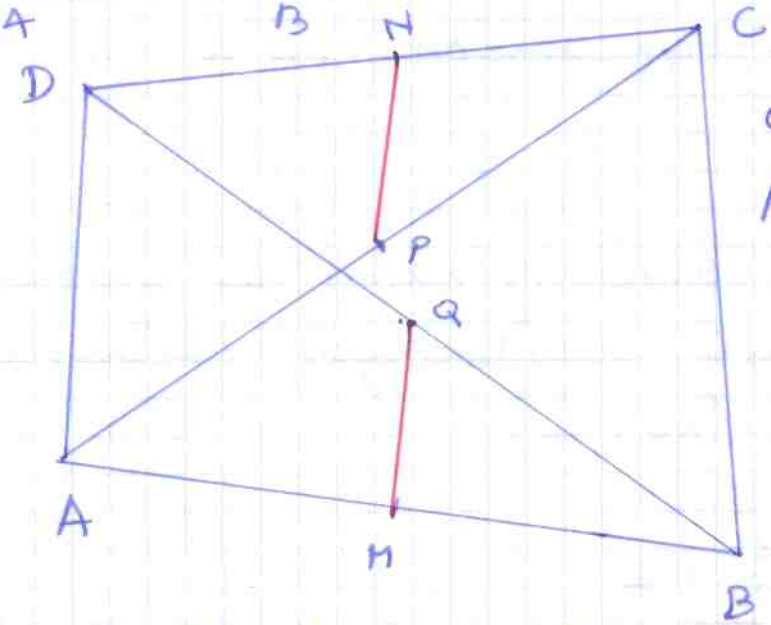
$$\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} \cdot C_7^3 = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} \cdot \binom{7}{3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 4!}{3! \cdot 4!} = 360 \cdot 7 \cdot 5 = 12600$$

Twierdzenie o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta.



Jeżeli K, L to środki boków AC i BC odpowiednio, to $KL \parallel AB$ i $|KL| = \frac{1}{2}|AB|$

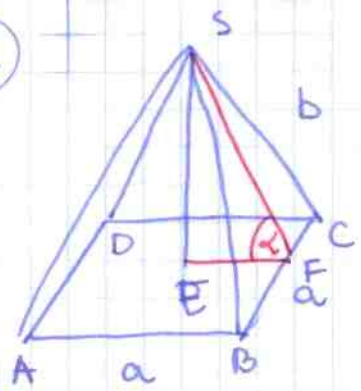


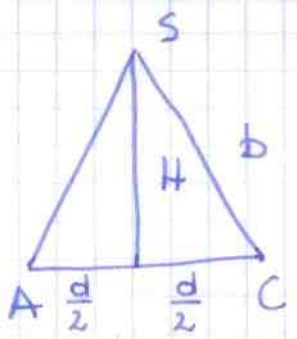
Odcinek NP łączy połowy ramion trójkąta ACD, zatem jest równoległy do odcinka AD, będącego podstawą trójkąta ACD

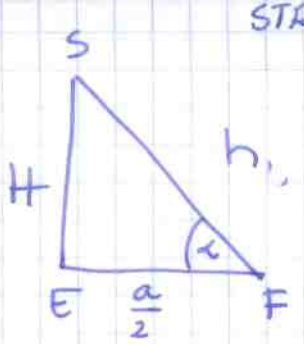
Odcinek QM łączy połowy ramion trójkąta ABD, zatem jest równoległy do odcinka AD, będącego podstawą trójkąta ABD.

Jeśli $QM \parallel AD$ i $NP \parallel AD$, to $QM \parallel NP$. #

(11)







$$\frac{d}{b} = \frac{6}{5} \qquad \frac{a\sqrt{2}}{b} = \frac{6}{5} \qquad b = \frac{a5\sqrt{2}}{6}$$

z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACS

$$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2$$

$$H^2 + \frac{a^2 2}{4} = \left(\frac{a5\sqrt{2}}{6}\right)^2$$

$$H^2 = \frac{25a^2 \cdot \cancel{2}^{1}}{\cancel{36}_{18}} - \frac{a^2}{2}$$

$$H^2 = \frac{25a^2}{18} - \frac{9a^2}{18}$$

$$H^2 = \frac{16}{18}a^2$$

$$H^2 = \frac{8}{9}a^2$$

$$H = \frac{2\sqrt{2}a}{3}$$

z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EFS

$$H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2$$

$$\frac{8a^2}{9} + \frac{a^2}{4} = h^2$$

$$\frac{32a^2}{26} + \frac{9a^2}{36} = h^2$$

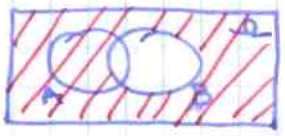
$$\frac{41}{36}a^2 = h^2$$

$$h = \frac{a\sqrt{41}}{6}$$

$$\sin\alpha = \frac{H}{h} \qquad \sin\alpha = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}a}{\frac{a\sqrt{41}}{6}} \qquad \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}a}{3} \cdot \frac{6}{a\sqrt{41}}$$

$$\sin\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{41}} \cdot \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} \qquad \sin\alpha = \frac{4\sqrt{82}}{41}$$

(12)



zacieniowany obszar to B', zatem $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

z własności prawdopodobieństwa $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ i $P(A \cup B) \leq 1$ mamy $P(A \cap B) = 0{,}9 + 0{,}7 - P(A \cup B) \leq$ $1{,}6 - 1 = 0{,}6$,

$P(A \cap B') \leq 0{,}9 - 0{,}6 = 0{,}3$