naszemiasto.pl

MatmaNa6
z nami zaliczysz matmę na 6!

MATURA 2012

Powtórka do matury z matematyki

Część VIII: Geometria analityczna
ODPOWIEDZI

Organizatorzy: MatmaNa6.pl, naszemiasto.pl

Witaj,

otrzymałeś już ósmą z dziesięciu części materiałów powtórkowych do matury z matematyki. Tutaj znajdziesz rozwiązania udostępnionych zadań z działu geometria analityczna. W każdy poniedziałek pod adresem http://naszemiasto.pl będą dostępne kolejne części powtórki.
Pod adresem http://matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum znajdziesz materiały pomocne przy rozwiązywaniu zadań.

Powodzenia,
Redaktorzy portalu MatmaNa6.pl
Dziennikarze naszemiasto.pl

Geometria analityczna

Zadanie 1:

Wskaż prostą równoległą do prostej $k: y=3x+5$.

$a)\ y=-3x-4$

$b)\ y=3x+1$

$c)\ y=-\frac{1}{3}x+6$

$d)\ y=\frac{1}{3}x+2$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: b)

Dwie proste są równoległe, jeżeli mają taki sam współczynnik kierunkowy.

Zadanie 2:

Wskaż równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkty $P=(3,-3)$ i $Q=(1,3)$.

$a) y=-3x+6$

$b)\ y=-x+1$

$c)\ y=2x+3$

$d)\ y=\frac{-1}{4}x$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: a)

$$y=ax+b$$

Prosta przechodzi przez punkty $P=(3,-3)$ i $Q=(1,3)$. Stąd otrzymujemy układ równań.

$$\begin{cases} -3=3a+b \\ 3=a+b \end{cases}$$

$$-3-3=3a+b-(a+b)$$

$$-6=3a+b-a-b$$

$$-6=2a$$

$$a=-3$$

$$3=-3+b$$

$$b=6$$

$$\begin{cases} a=-3 \\ b=6 \end{cases}$$

Równanie prostej, to:

$$y=-3x+6$$

Zadanie 3:

Wskaż środek okręgu o równaniu $(x-3)^2+y^2=16$.

$a)\ S=(3,0)$

$b)\ S=(-3,0)$

$c)\ S=(0,3)$

$d)\ S=(0,-3)$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: a)

Zadanie 4:

Punkt styczności okręgu o równaniu $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ z osią OX to:

$a)$ $(3,2)$

$b)$ $(3,0)$

$c)$ $(0,3)$

$d)$ $(-3,0)$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: b)

Zadanie 5:

Dla jakich wartości parametru a prosta k jest prostopadła do prostej l ?

$k: y=(a+4)x-10$

$l: y=-15x+10$

Rozwiązanie:

$$-15(a+4)=-1$$

Na podstawie powyższego równania, obliczamy wartość parametru a .

$$a+4=\frac{1}{15}$$

$$a=\frac{1}{15}-4=\frac{1-60}{15}=\frac{-59}{15}$$

Zadanie 6:

Oblicz pole trójkąta równobocznego, wpisanego w okrąg o równaniu
$x^2+y^2-4x+6y+9=0$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy równanie okręgu.

$$x^2+y^2-4x+6y+9=0$$
$$x^2-4x+y^2+6y+9=0$$
$$x^2-4x+4+y^2+6y+9-4=0$$
$$(x-2)^2+(y+3)^2-4=0$$
$$(x-2)^2+(y+3)^2=2^2$$

Promień okręgu wynosi:

$$R=2$$

Obliczamy wysokość trójkąta.

$$R=\frac{2}{3}h$$
$$2=\frac{2}{3}h$$
$$h=3$$

Obliczamy długość boku.

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$3=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$a=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

Obliczamy pole trójkąta równobocznego.

$$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}=\frac{12\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$$

Zadanie 7:

Dane są punkty $A=(3,6)$, $B=(2,8)$. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB .

Rozwiązanie:

Symetralna danego odcinka AB to prosta prostopadła do prostej wyznaczonej przez punkty A , B oraz przechodząca przez środek tego odcinka.

Znajdujemy prostą AB .

$$y=a_1x+b_1$$

Punkty $A=(3,6)$, $B=(2,8)$ spełniają równanie prostej AB . Na tej podstawie wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AB .

$$\begin{cases} 6=3a_1+b_1 \\ 8=2a_1+b_1 \end{cases}$$

$$8-6=2a_1+b_1-(3a_1+b_1)$$

$$2=2a_1+b_1-3a_1-b_1$$

$$2=-a_1$$

$$a_1=-2$$

Szukany wzór symetralnej oznaczamy przez:

$$y=a_2x+b_2$$

$$-2\cdot a_2=-1$$

$$a_2=\frac{1}{2}$$

Równanie symetralnej:

$$y=\frac{1}{2}x+b_2$$

Środek odcinka *AB,* to:

$$S=(\frac{3+2}{2,}\frac{6+8}{2})=(\frac{5}{2},7)$$

Ponieważ symetralna l przechodzi przez środek $S=(\frac{5}{2},7)$, to

$$7=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}+b_2$$

$$b_2=7-\frac{5}{4}=\frac{28-5}{4}=\frac{23}{4}$$

Równanie symetralnej odcinka AB :

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{23}{4}$$

Zadanie 8:

Zapisz wzór funkcji f przesuniętej o wektor $\vec{v}$.

$a)\ f(x)=x^2,\ \vec{v}=[3,-2]$,

$b)\ f(x)=\frac{1}{x},\ \vec{v}=[-2{,}0],$

$c)\ f(x)=\log_3 x,\ \vec{v}=[-1{,}1]$,

Rozwiązanie:

$a)\ f(x)=x^2,\ \vec{v}=[3,-2]$,

$$f(x-3)-2=(x-3)^2-2=x^2-6x+9-2=x^2-6x+7$$

$b)\ f(x)=\frac{1}{x},\ \vec{v}=[-2{,}0],$

$$f(x+2)+0=\frac{1}{x+2}$$

$c)\ f(x)=\log_3 x,\ \vec{v}=[-1{,}1]$,

$$f(x+1)+1=\log_3(x+1)+1$$

Zadanie 9:

Określ dla jakich wartości parametru m, okręgi

$$O_1:(x+m)^2+(y-2\mathrm{m})^2=9,$$
$$O_2:(x-3\mathrm{m})^2+(y+m)^2=16$$

mają ze sobą dokładnie jeden punkt wspólny.

Rozwiązanie:

$$O_1:(x+m)^2+(y-2\mathrm{m})^2=9$$
$$S_1=(-m,2m)$$
$$r_1=3$$

$$O_2:(x-3\mathrm{m})^2+(y+m)^2=16$$
$$S_2=(3\mathrm{m},-m)$$
$$r_2=4$$

$$|S_1S_2|^2=(3\mathrm{m}+m)^2+(-m-2\mathrm{m})^2=16\mathrm{m}^2+9\mathrm{m}^2=25\mathrm{m}^2$$
$$|r_1-r_2|=|4-3|=1$$
$$r_1+r_2=4+3=7$$

Okręgi mają ze sobą dokładnie jeden punkt wspólny jeżeli są ze sobą styczne. Rozważamy dwa przypadki: kiedy są styczne wewnętrznie lub styczne zewnętrznie.

- Okręgi styczne wewnętrznie.

$$|S_1S_2|=|r_1-r_2|$$
$$|S_1S_2|^2=|r_1-r_2|^2$$
$$25\mathrm{m}^2=1$$
$$m^2=\frac{1}{25}$$
$$m=\frac{\pm 1}{5}$$

- Okręgi styczne zewnętrznie.

$$|S_1S_2| = r_1 + r_2$$

$$|S_1S_2|^2 = (r_1 + r_2)^2$$

$$25\mathrm{m}^2 = 7^2$$

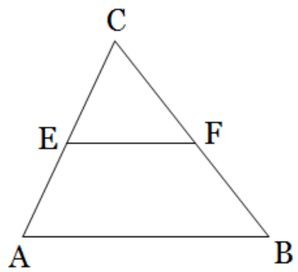
$$m^2 = \frac{49}{25}$$

$$m = \frac{\pm 7}{5}$$

Zadanie 10:

Punkt E jest środkiem boku AC trójkąta ABC, natomiast punkt F jest śodkiem boku BC tego trójkąta. Wykaż, że odcinek EF jest równoległy do boku AB i jego długość jest równa połowie długości boku AB.

Rozwiązanie:



$$\vec{EF} = \vec{EC} + \vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{CB}) = \frac{1}{2}\vec{AB}$$

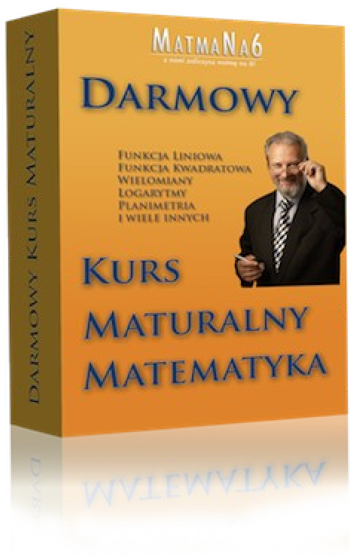
Kolejna porcja zadań, tym razem z działu stereometria dostępna będzie w poniedziałek pod adresem

http://www.naszemiasto.pl

Szczegółowe wyjaśnienia zagadnień z działu geometria analityczna, które pomogą Ci w rozwiązaniu powyższych zadań znajdziesz na stronie

http://matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum

Wszelkie uwagi, komentarze na temat powtórki maturalnej można kierować na adres pytania@matmana6.pl.



Redaktorzy serwisu MatmaNa6.pl prowadzą Darmowy Kurs Maturalny z matematyki na poziomie podstawowym i rozszerzonym, który składa się z ponad 70 lekcji. Każda lekcja zawiera:

1. omówienie wybranego zagadnienia,
2. ćwiczenia interaktywne,
3. przykłady zadań,
4. zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania,
5. rozwiązania zadań z poprzedniej lekcji.

Kliknij aby zapisać się na kurs.